

FIZYKA

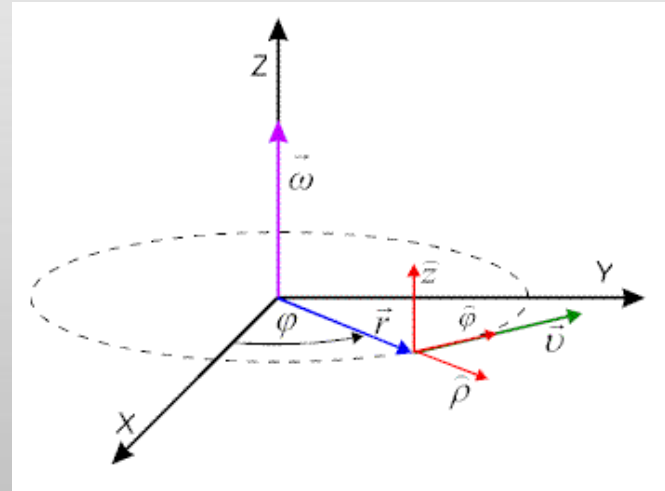
RUCH OBROTOWY

Wielkości fizyczne występujące w ruchu obrotowym

Prędkość kątowa $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{z}$$

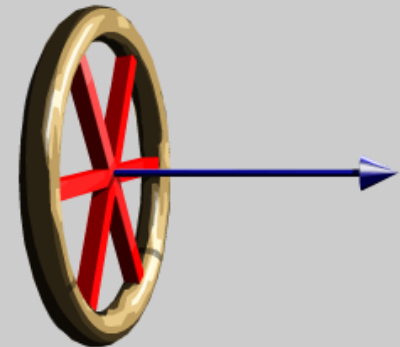
Prędkość kątowa jest wektorem o kierunku prostopadłym do płaszczyzny ruchu



The Direction of the Angular Velocity Vector

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$v = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega$$



Wielkości fizyczne występujące w ruchu obrotowym

Okres: T

Częstotliwość: ν

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu$$

Przyspieszenie kątowe

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$

Przyspieszenie liniowe:

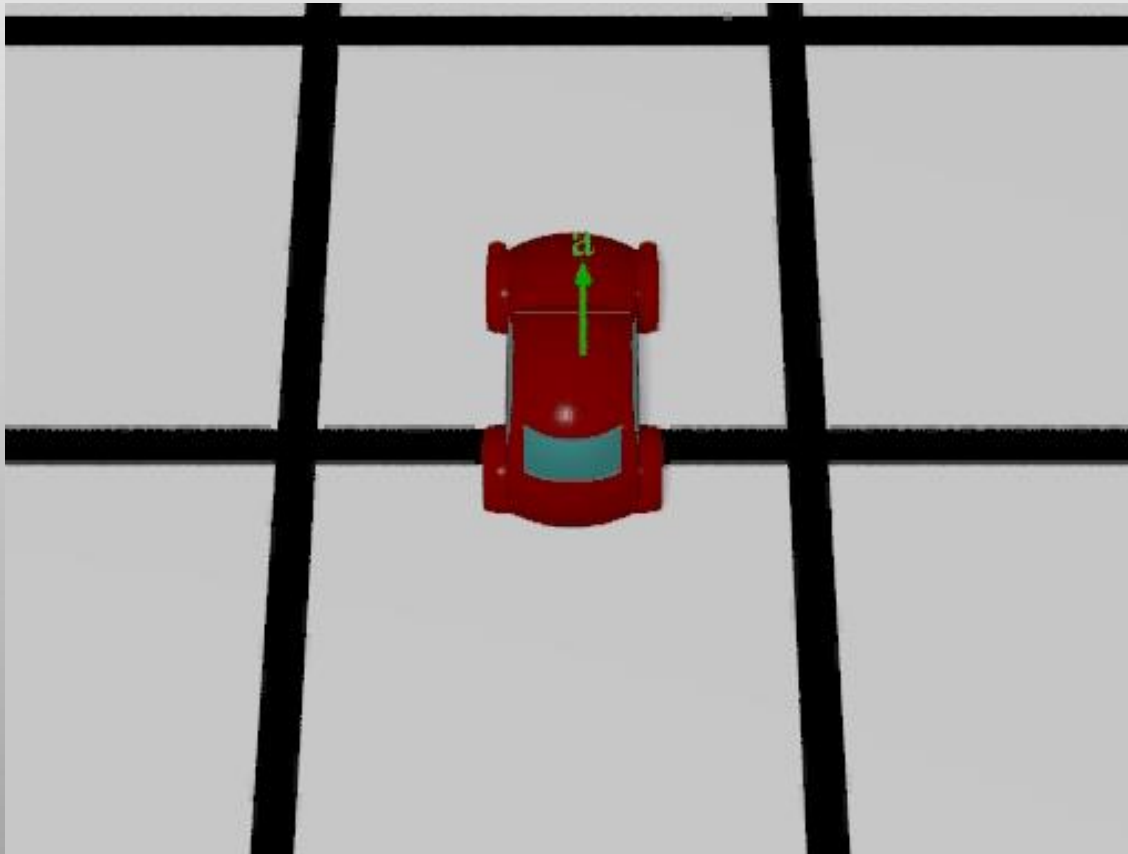
Składowa normalna do toru

Składowa styczna do toru

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \cdot \omega)^2}{r} = r \cdot \omega^2$$

$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r \cdot \omega)}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \varepsilon$$

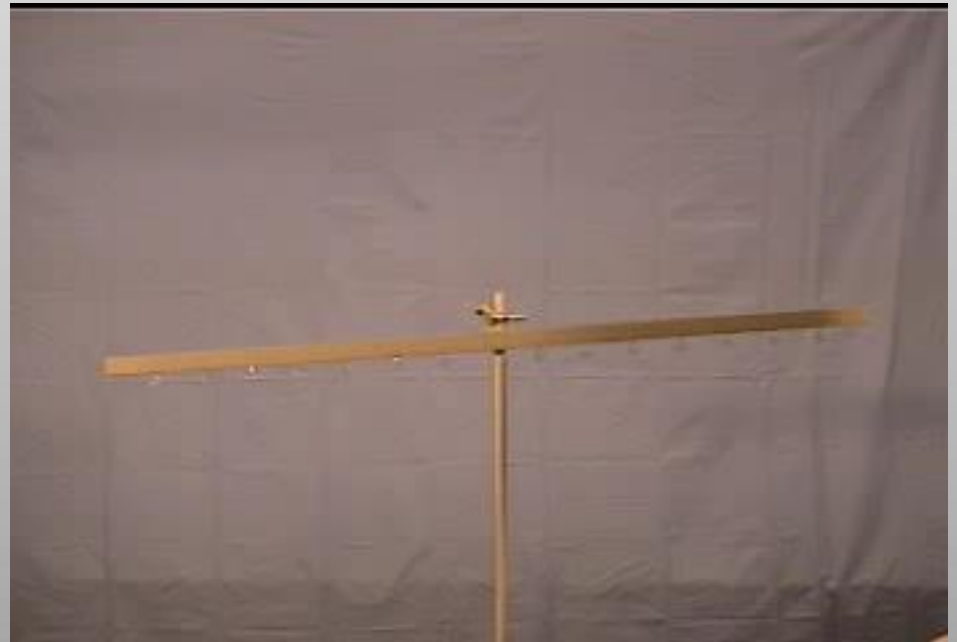
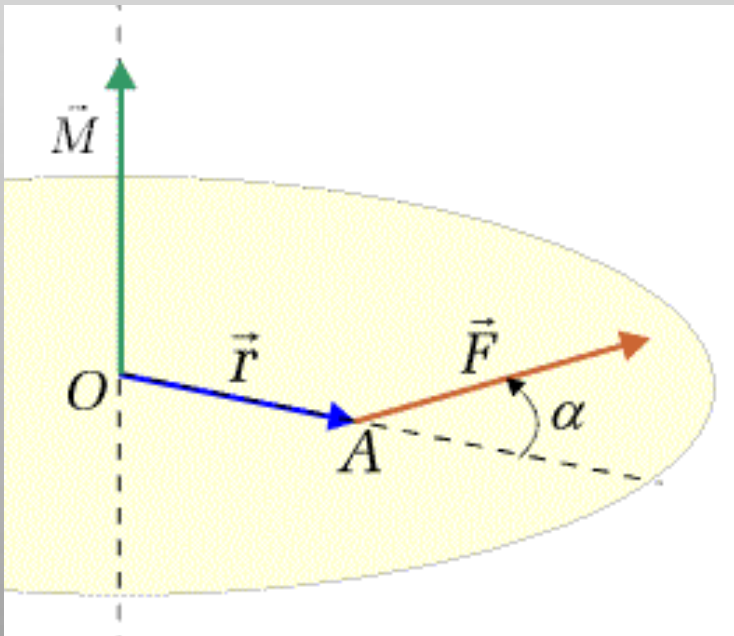
Kierunki wektorów prędkości i przyspieszenia



Moment siły

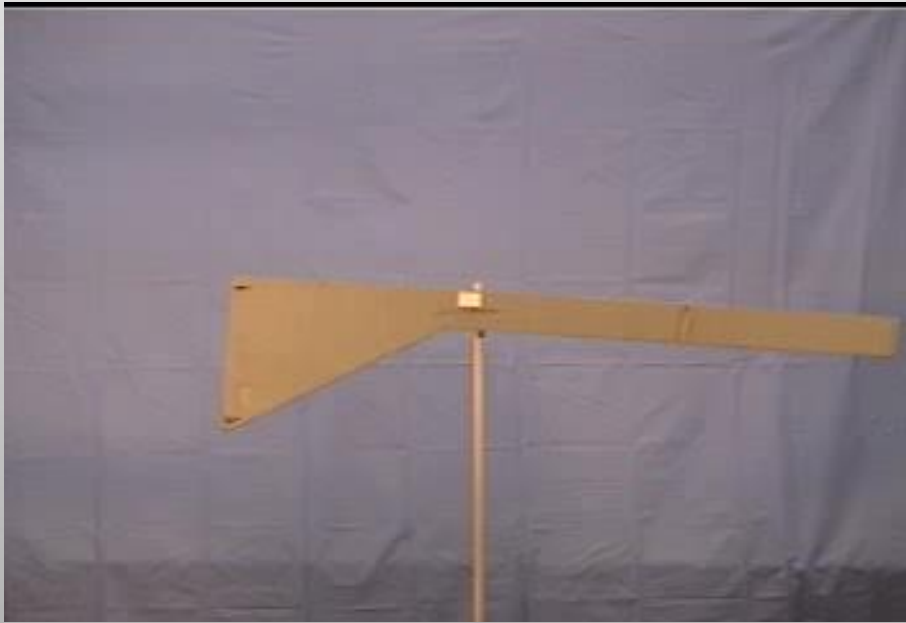
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$$

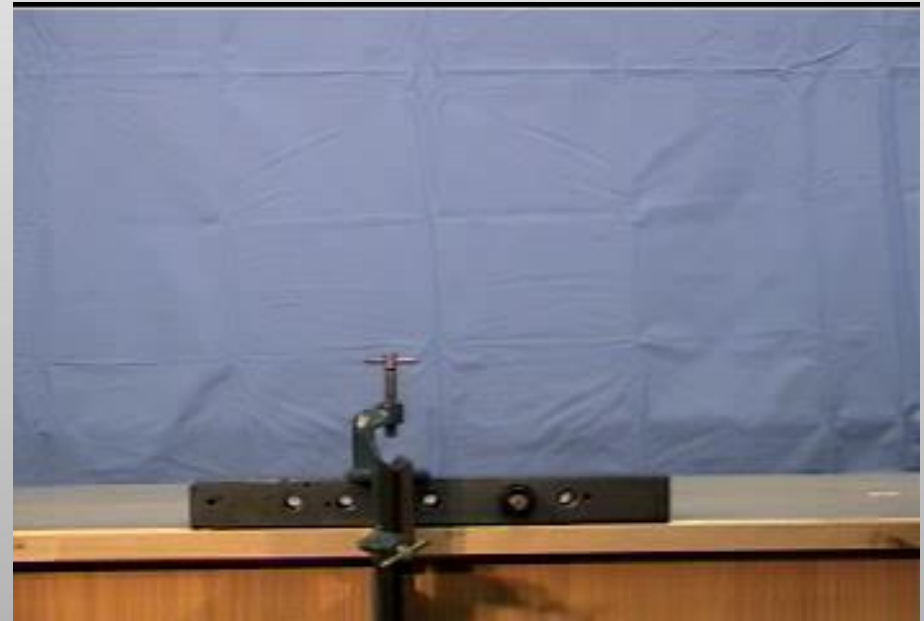


Zależność od r

Moment siły

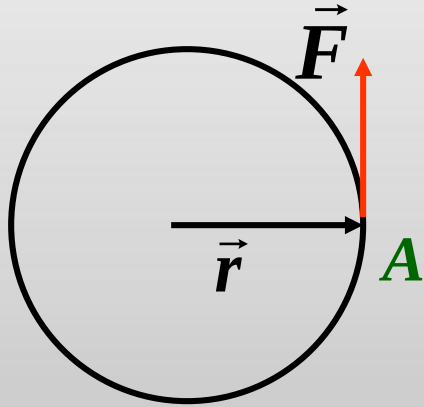


Zależność od kąta



Zależność od r

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego



Prosty przykład obiektu o masie m poruszającego się po okręgu pod wpływem działania siły F umożliwia rozszerzenie II zasady dynamiki Newtona na ruch obrotowy

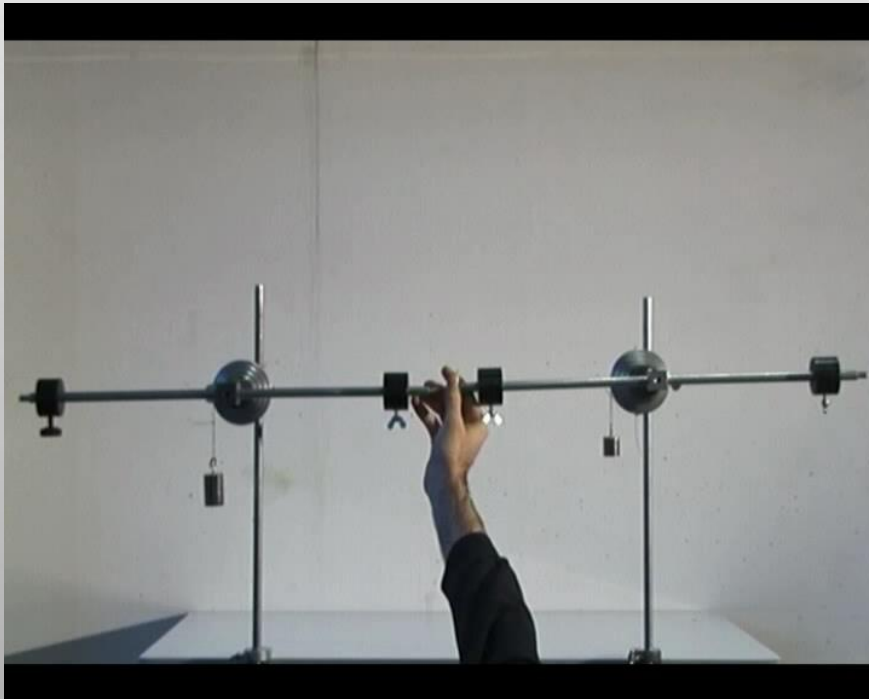
$$F = m \cdot a$$

$$F \cdot r = m \cdot a \cdot r \cdot \frac{r}{r} = mr^2 \cdot \frac{a}{r} = I \cdot \varepsilon$$

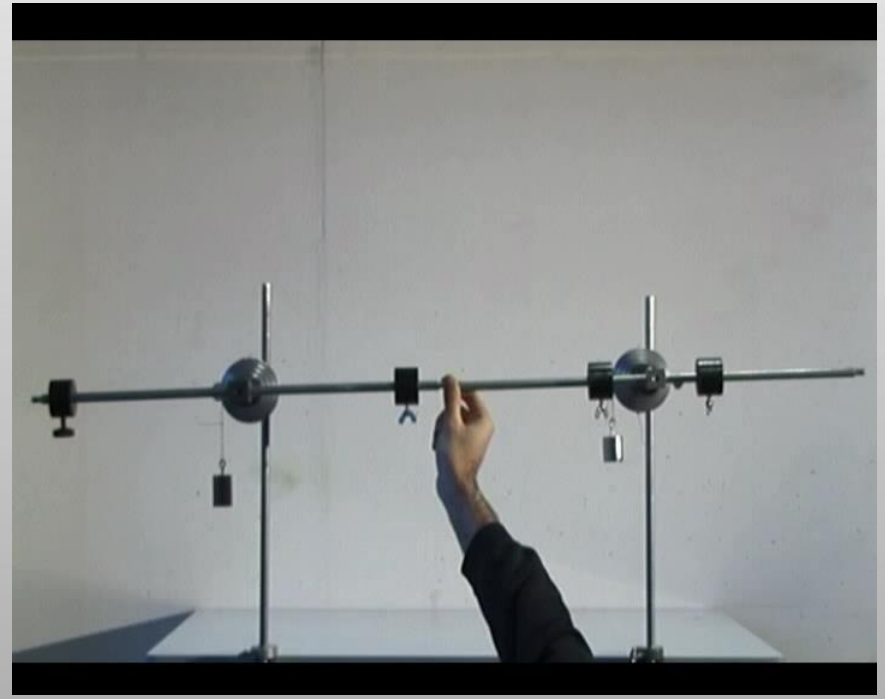
$$I = m \cdot r^2$$

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego



Zależność od M

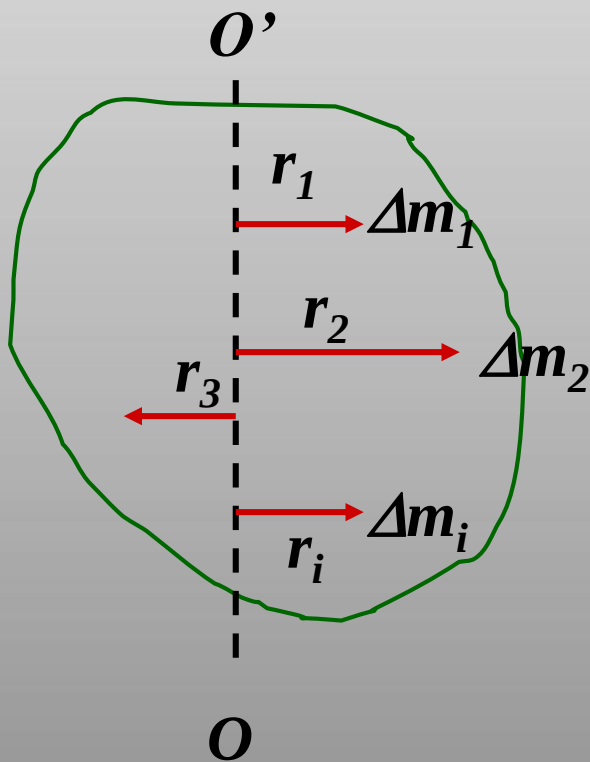


Zależność od I

Moment bezwładności

Dla punktu materialnego: $I = m \cdot r^2$

Dla bryły sztywnej: $I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \cdot r_i^2$

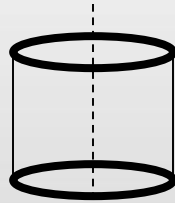


$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 = \int_M r^2 dm$$

Moment bezwładności w ruchu obrotowym
Jest miarą bezwładności ciała, (pełni podobną
Rolę jak masa w ruchu postępowym).

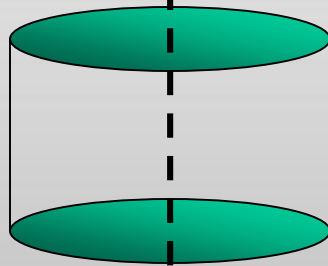
Momenty bezwładności różnych brył

Rura (obręcz)



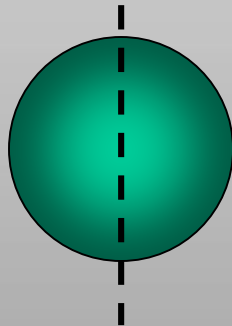
$$I = m \cdot r^2$$

Walec pełny



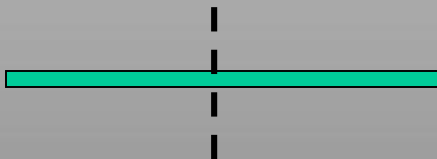
$$I = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

Kula



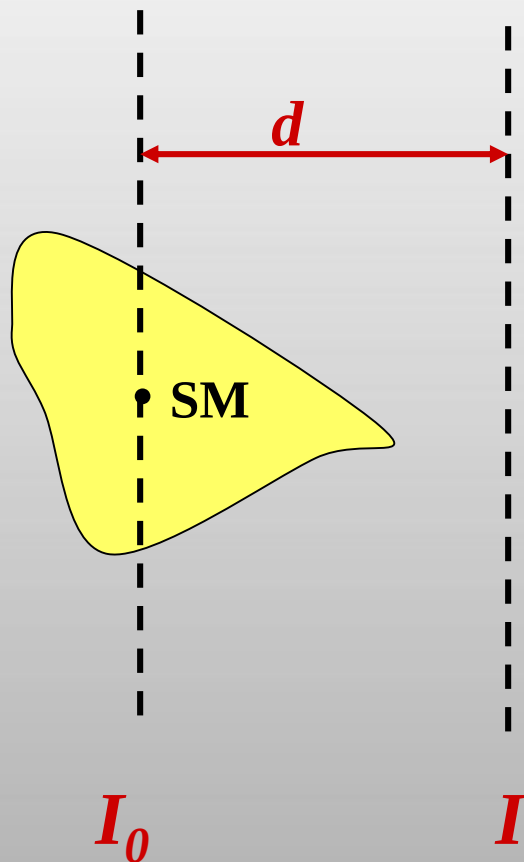
$$I = \frac{2}{5} m \cdot r^2$$

Pręt



$$I = \frac{1}{12} m \cdot r^2$$

Twierdzenie Steinera



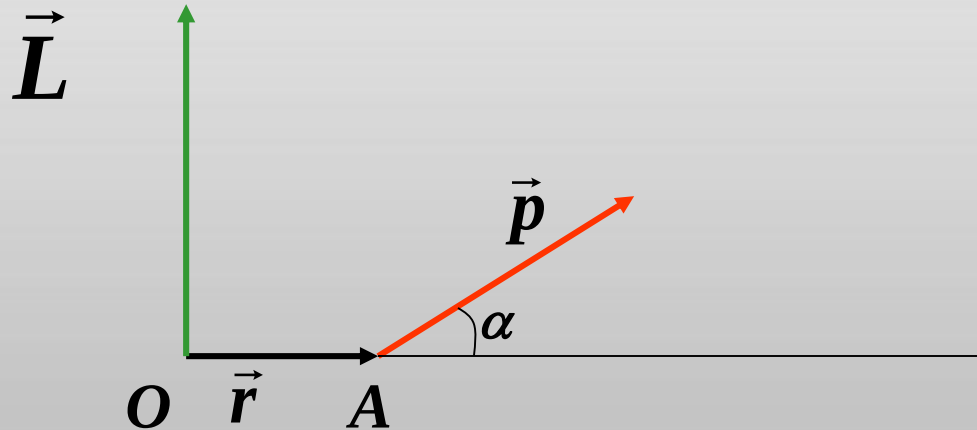
$$I = I_0 + m \cdot d^2$$

Twierdzenie Steinera umożliwia obliczenie Momentu ciała względem dowolnej osi obrotu. Jeżeli znamy moment bezwładności względem osi równoległej, przechodzącej przez środek masy.

Moment pędu

Punkt materialny:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

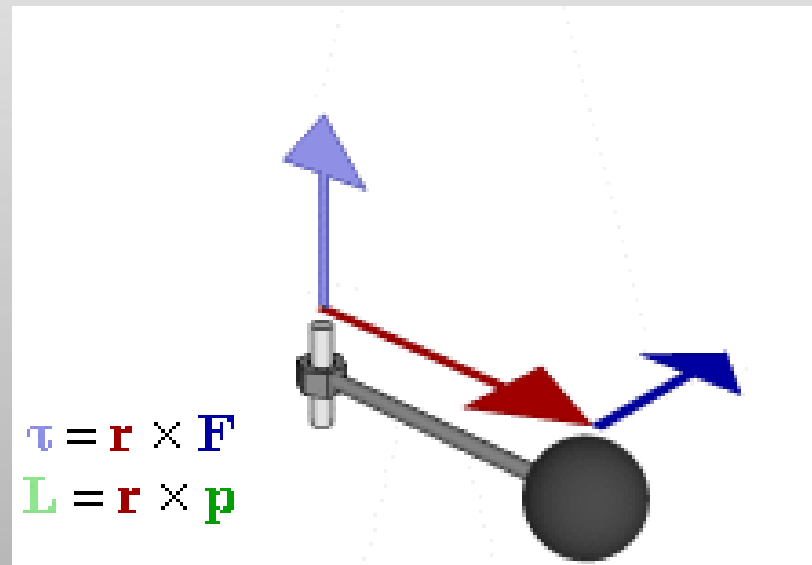
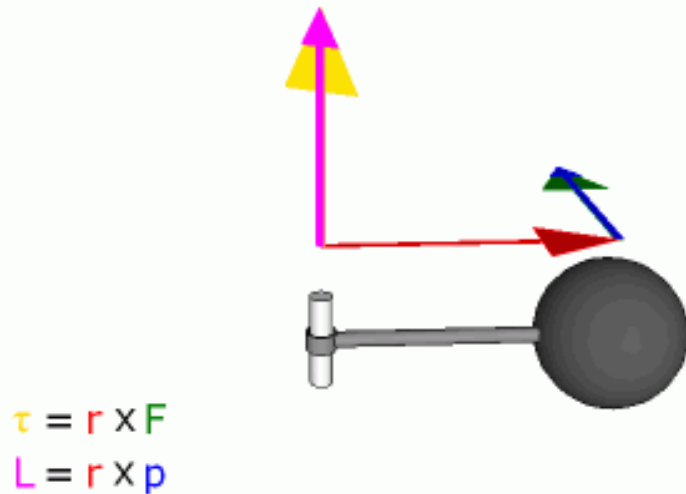


$$L = r \cdot p \cdot \sin \alpha = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha = r \cdot m \cdot \omega \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \omega = I \cdot \omega$$

v_s

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Kierunki i zwroty momentu siły i momentu pędu



Równanie ruchu obrotowego

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Ruch postępowy

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{M}$

Obliczamy $\frac{d\vec{L}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{v} \times \vec{p} = 0$$

Równanie ruchu obrotowego

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Uniwersalna postać II zasady
Dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I \cdot \vec{\omega}) = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

Ta postać obowiązuje przy założeniu, że
Moment bezwładności obracającego się ciała
Jest stały

Zasada zachowania momentu pędu

Punkt materialny:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

N punktów materialnych:

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \vec{M}_{zewn} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{M}_{zewn} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Zasada zachowania momentu pędu czyli I zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\vec{M}_{zewn} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{M}_{zewn} = 0$$



$$\vec{L} = \text{const}$$

Moment pędu układu odosobnionego jest stały.

Jeśli ciało sztywne jest **układem symetrycznym** względem osi obrotu, to kierunek **momentu pędu** będzie równoległy do osi obrotu i zgodny z kierunkiem wektora **prędkości kątowej**.

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Zasada zachowania momentu pędu



Zmniejszamy I - rośnie prędkość kątowna

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Zasada zachowania momentu pędu

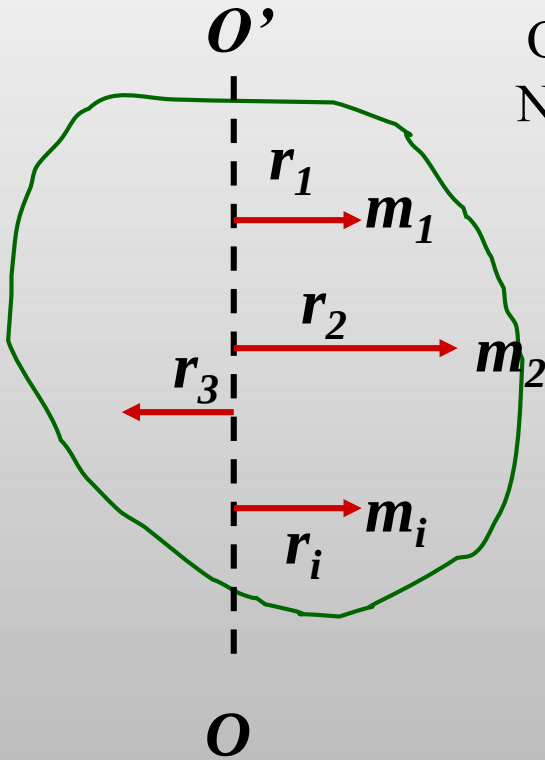


Sumaryczny moment pędu człowieka i koła pozostaje stały

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego

Obracająca się bryła posiada energię kinetyczną
Nawet jeżeli środek masy pozostaje w spoczynku



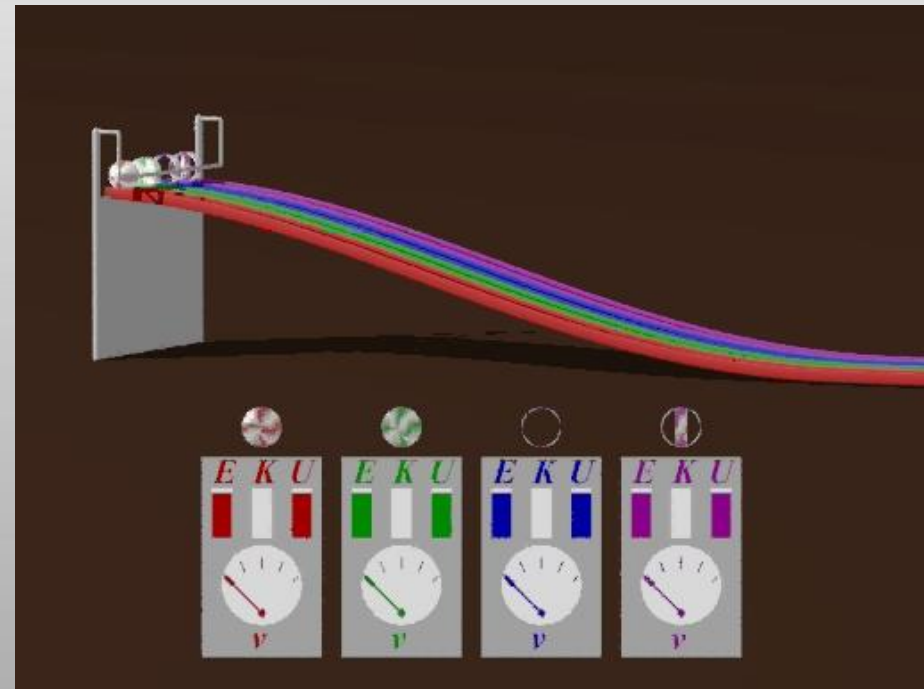
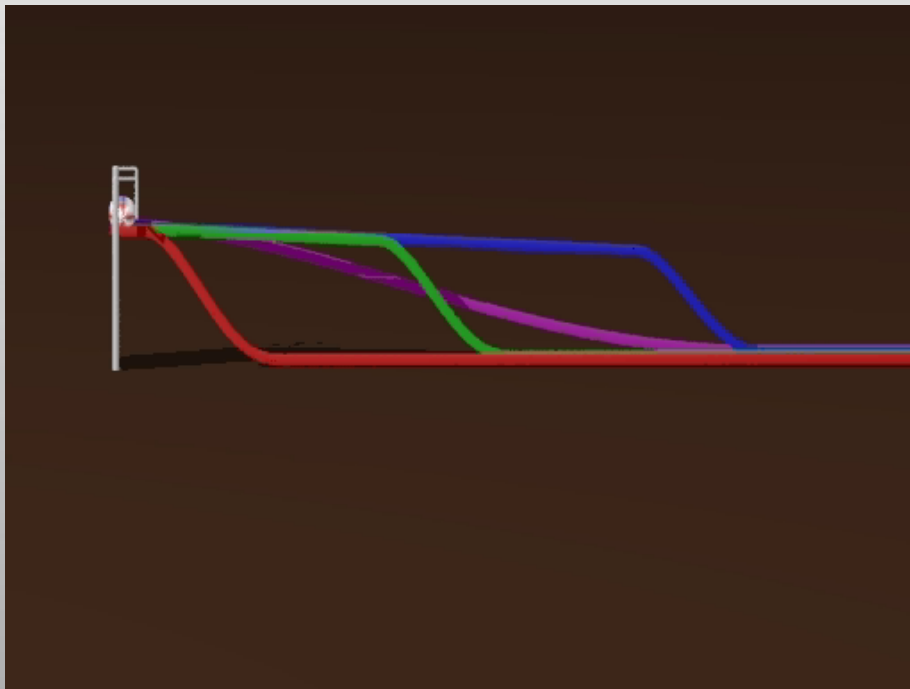
Punkt materialny:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Bryła sztywna:

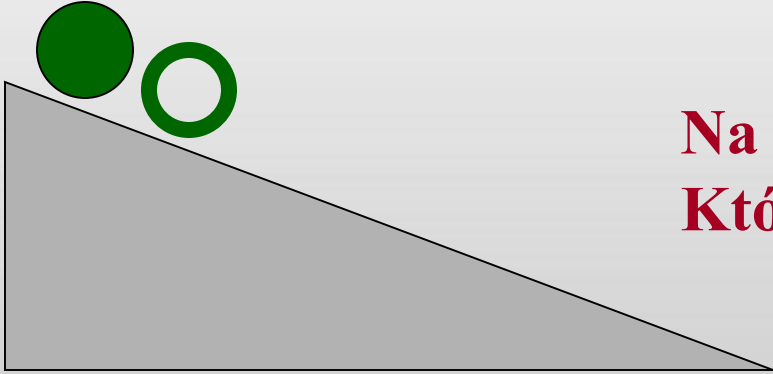
$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}$$

Przykład: energia kinetyczna ruchu postępowego i obrotowego



Czas toczenia na równi pochyłej zależy od momentu bezwładności

Przykład: energia kinetyczna ruchu postępowego i obrotowego



Na równi toczą się walec pełny i pusty.
Który pierwszy osiągnie podstawę?

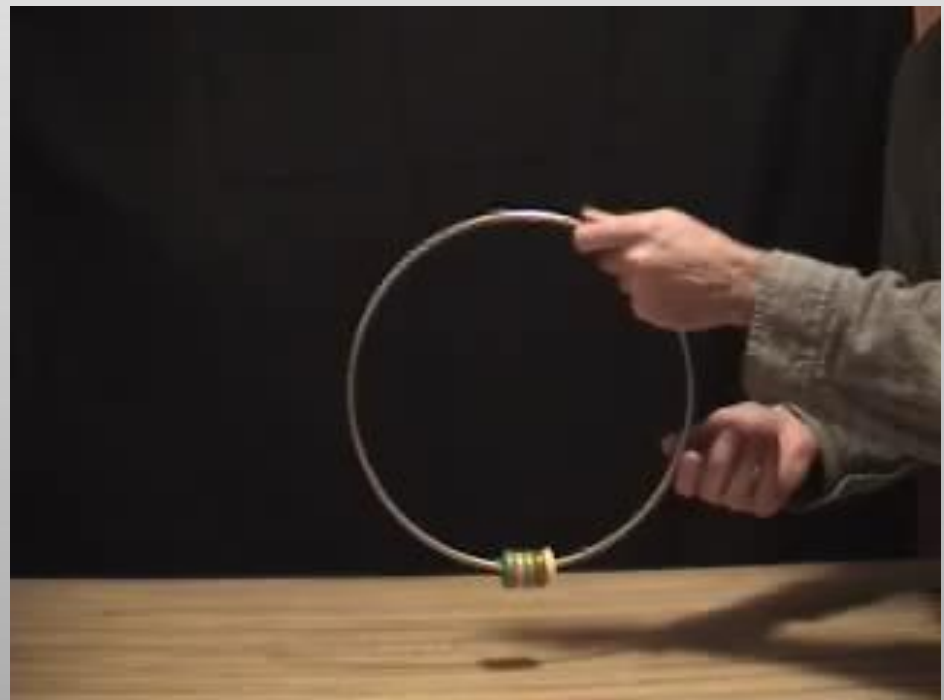
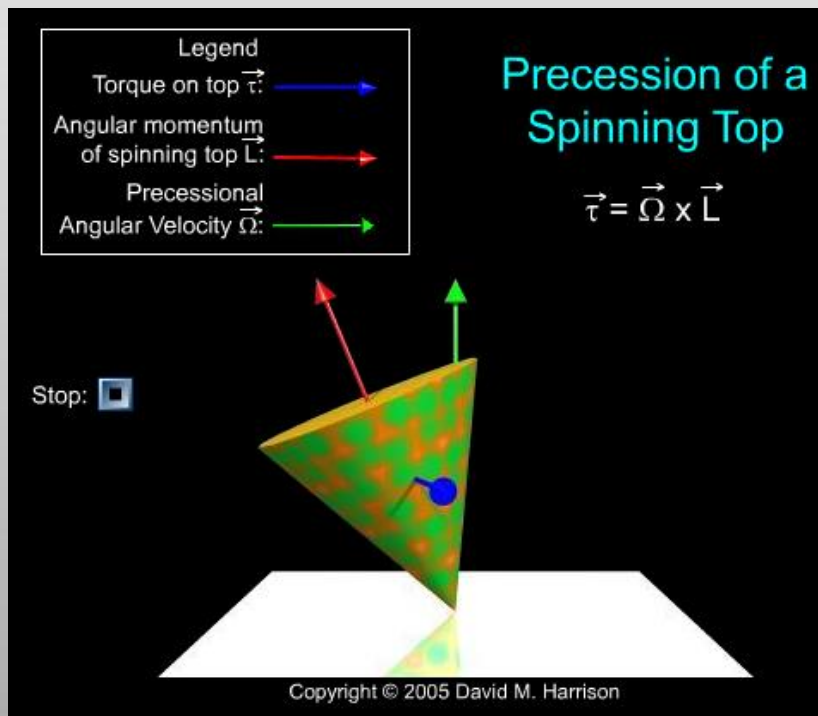
Walec pełny: $I = \frac{1}{2} m \cdot r^2$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2}}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} mv^2 \quad v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

Walec pusty: $I = m \cdot r^2$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2}}{2} = mv^2 \quad v = \sqrt{gh}$$

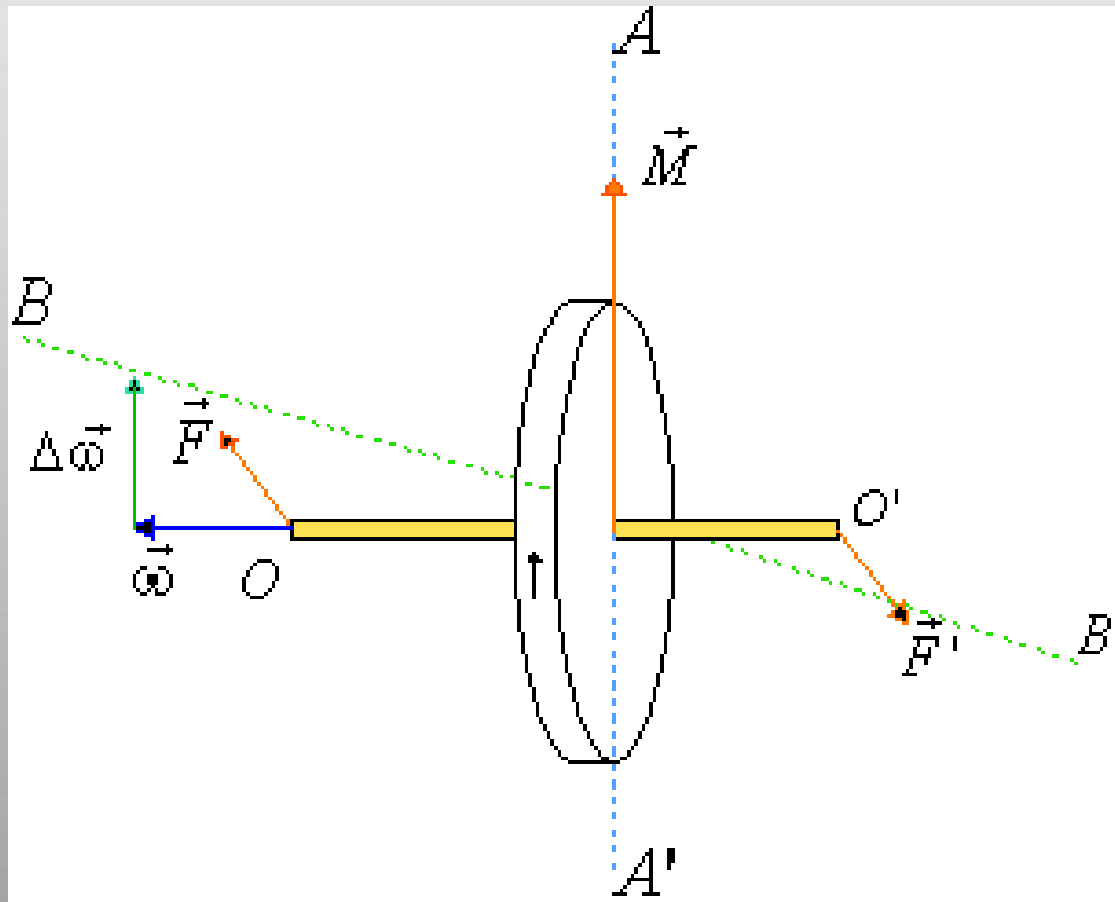
Ruch precesyjny



Żyroskop



Żyroskop



Precesja i nutacja

Ruch postępowy

Ruch obrotowy

Masa m

Moment bezwładności $I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i \cdot r_i^2$

Siła $\vec{F}$

Moment siły $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Prędkość liniowa $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Prędkość kątowna $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{z}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Przyspieszenie liniowe $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Przyspieszenie kątowne $\vec{\varepsilon} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$

$$\vec{a}_s = \vec{\varepsilon} \times r$$

Pęd $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Moment pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Ruch postępowy

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Zasada zachowania pędu:

$$\vec{F}_{zewn} = 0$$

$$\vec{p} = const$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Równanie ruchu:

Energia kinetyczna

Ruch obrotowy

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

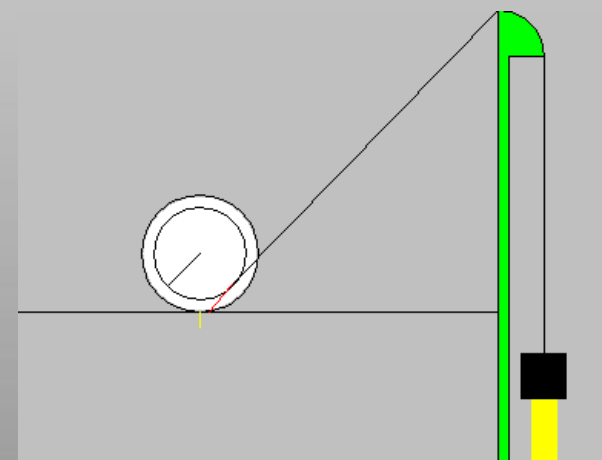
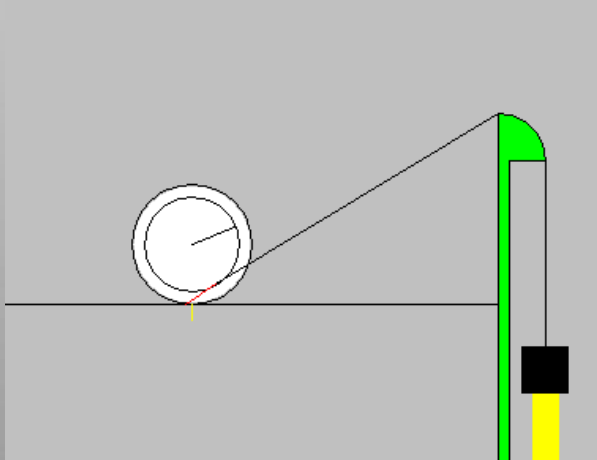
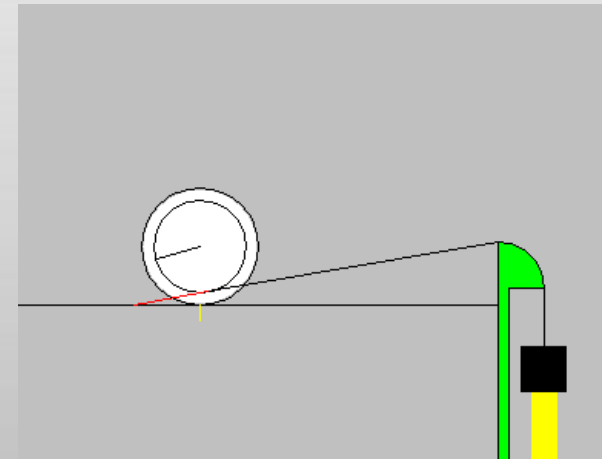
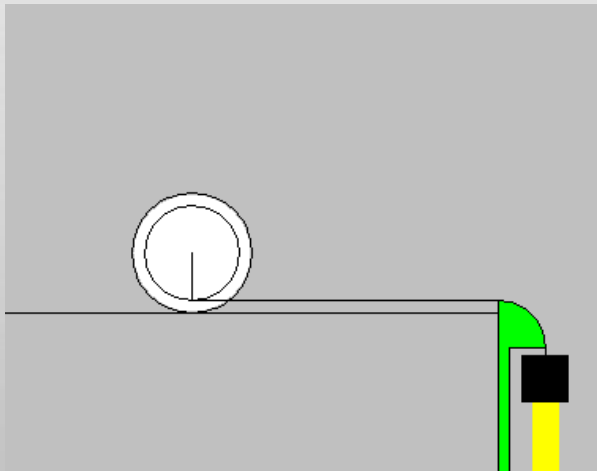
Zasada zachowania momentu pędu:

$$\vec{M}_{zewn} = 0$$

$$\vec{L} = const$$

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Przykład ruchu postępowego i obrotowego



Siła odśrodkowa



Przyspieszenie dośrodkowe

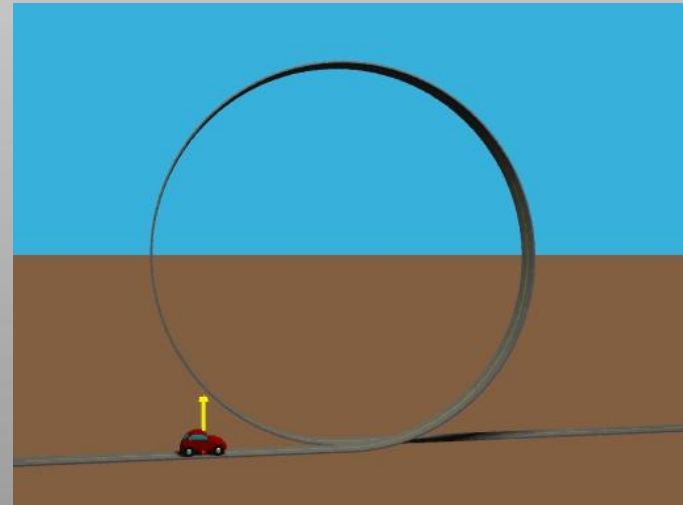
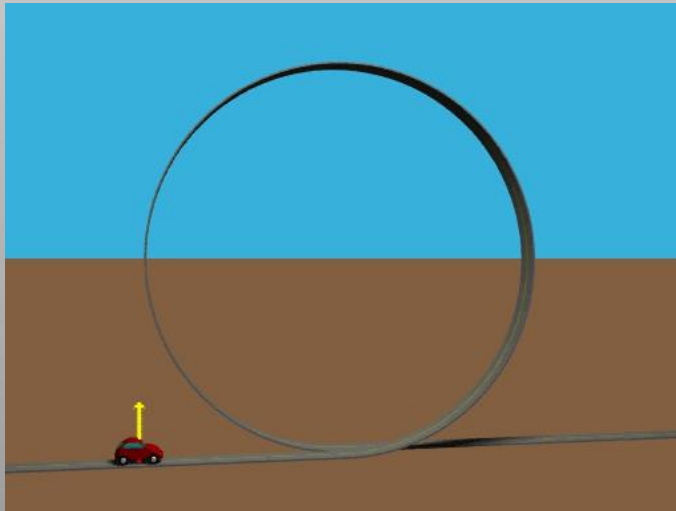
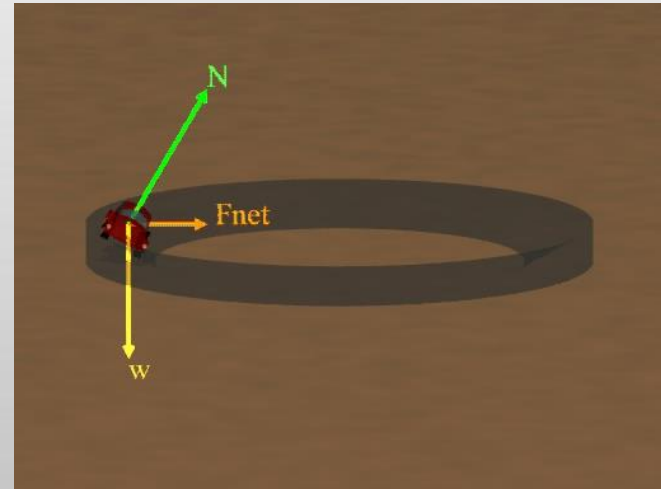
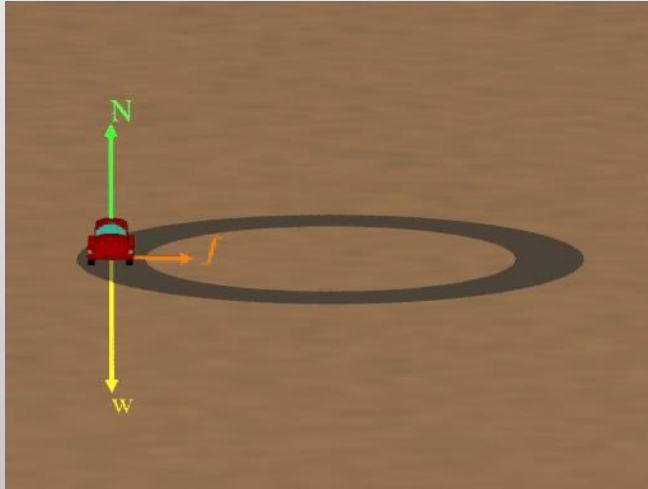
$$\vec{a} = \vec{a}_{dosr} = -\vec{r}'_{\perp} \cdot \omega^2$$

$$R = r'_{\perp} \quad v = \omega \cdot R$$

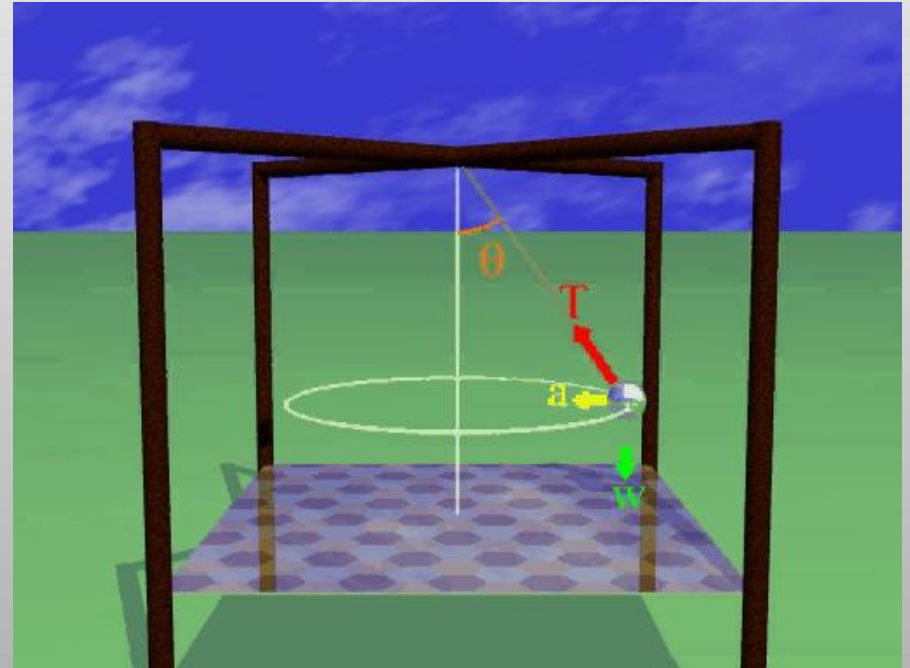
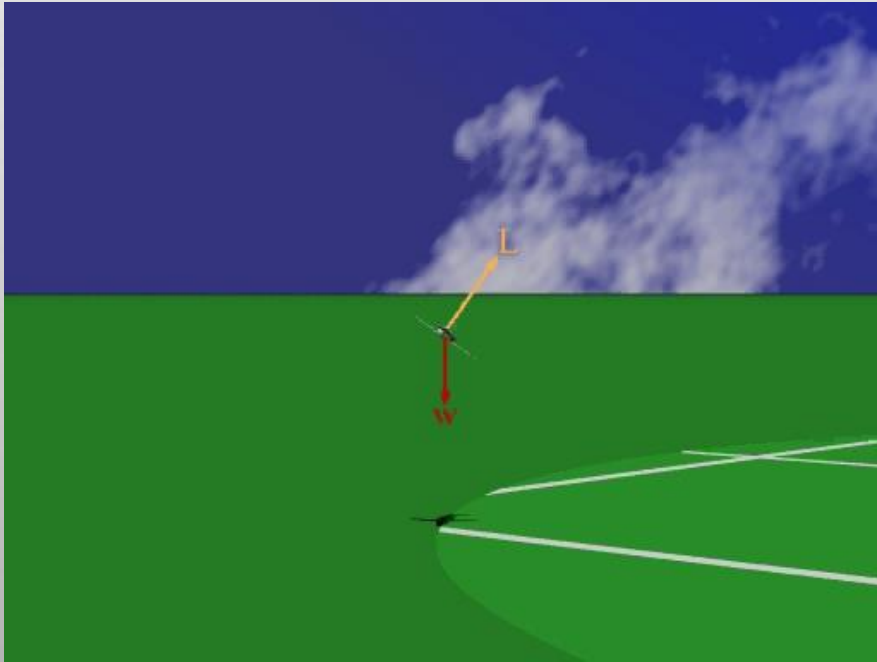
Odśrodkowa siła bezwładności:

$$F_{odsr} = m \cdot r'_{\perp} \cdot \omega^2 = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

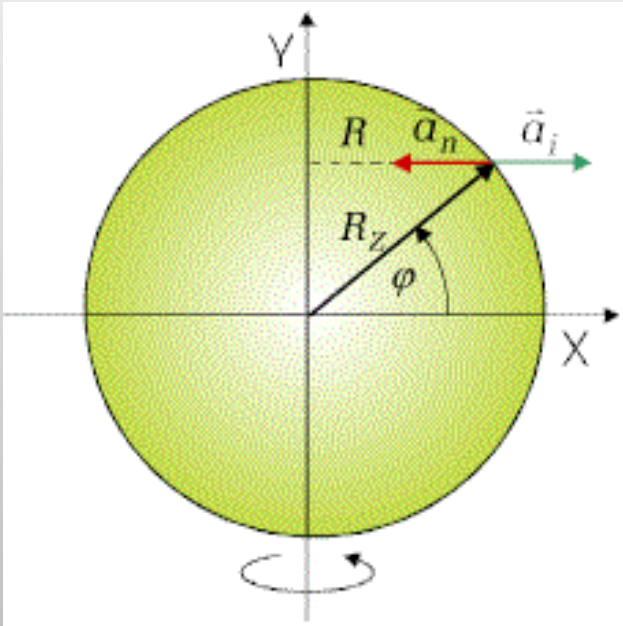
Przykłady działania siły odśrodkowej



Przykłady działania siły odśrodkowej



Siła odśrodkowa na powierzchni Ziemi

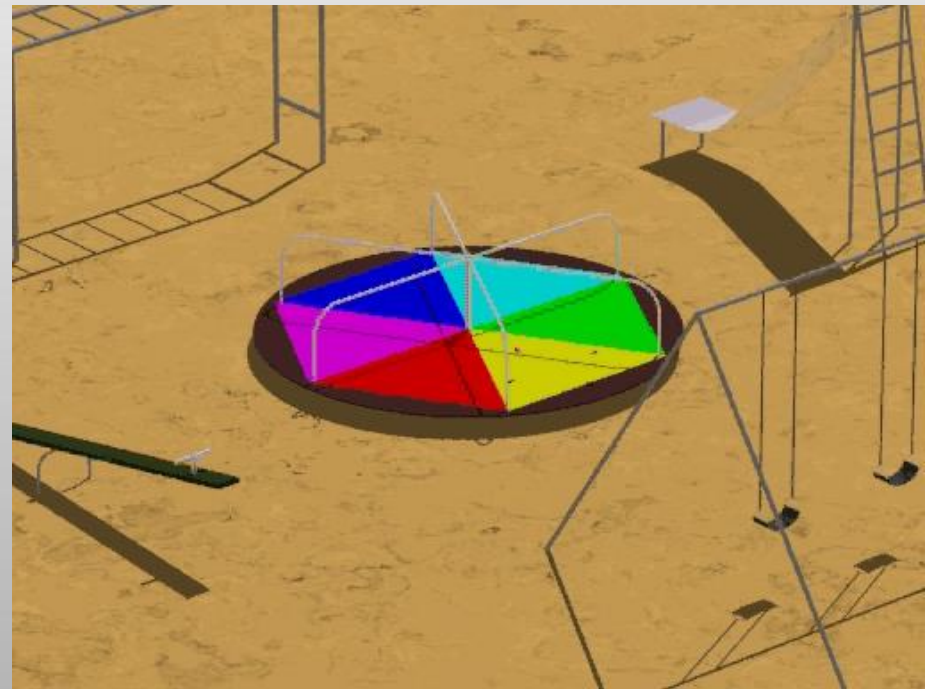


$$F_{odsr} = m \cdot \omega^2 \cdot R_z \cdot \cos \varphi$$

Składowa wzdłuż kierunku grawitacji:

$$F_{odsr} = (m \cdot \omega^2 \cdot R_z \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \varphi = m \cdot \omega^2 \cdot R_z \cdot \cos^2 \varphi$$

Siła Coriolisa



Siła Coriolisa

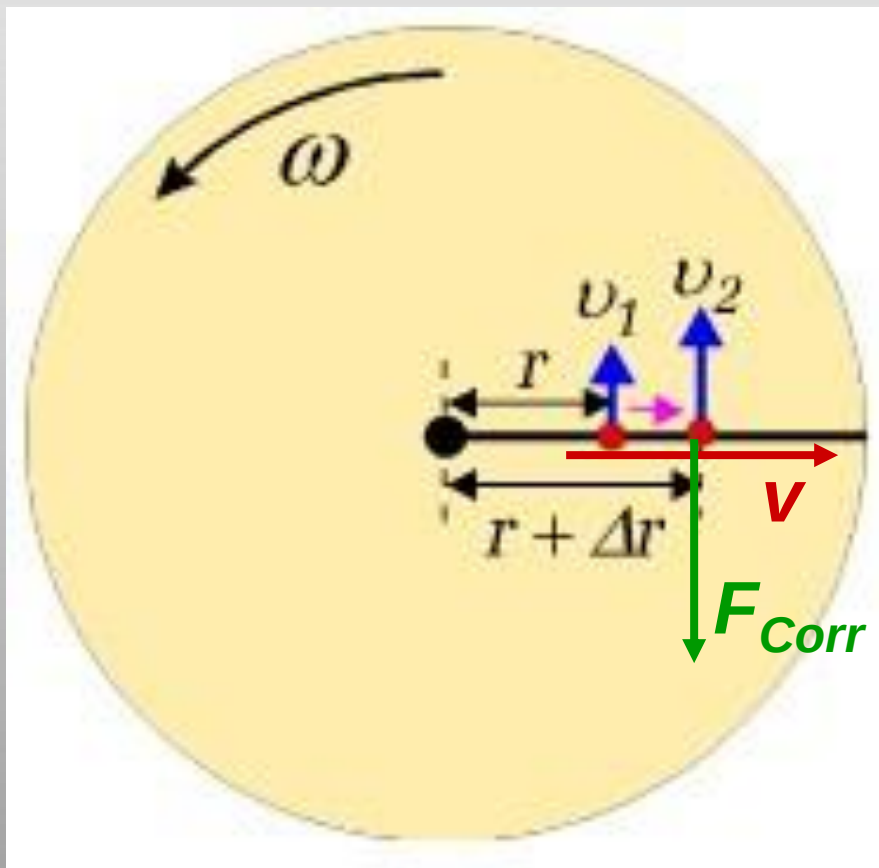
$$\vec{F}_{Corr} = -2 \cdot m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}')$$

Prędkość związana z ruchem obrotowym tarczy:

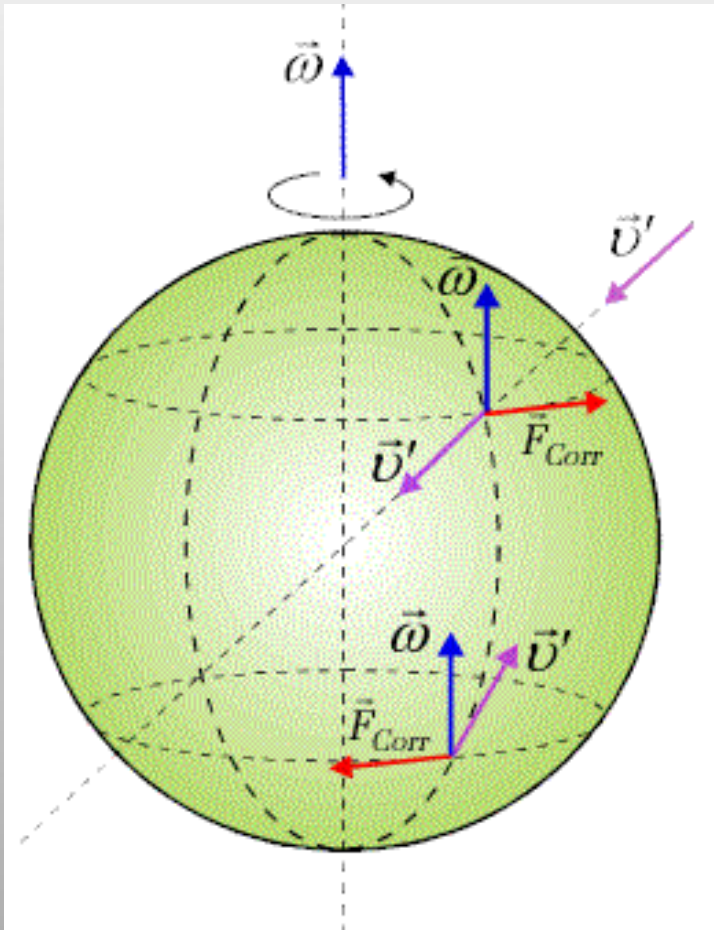
$$v_1 = \omega \cdot r$$

$$v_2 = \omega \cdot (r + \Delta r)$$

$$v_2 > v_1$$



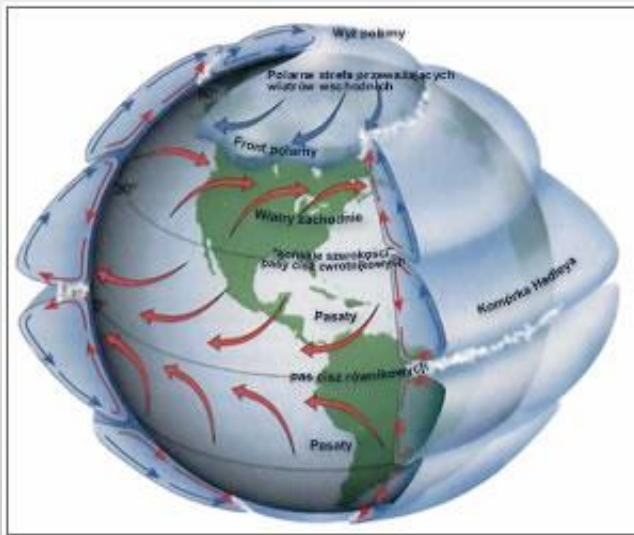
Siła Coriolisa



Ciało spadające swobodnie doznaje odchylenia **na wschód**.

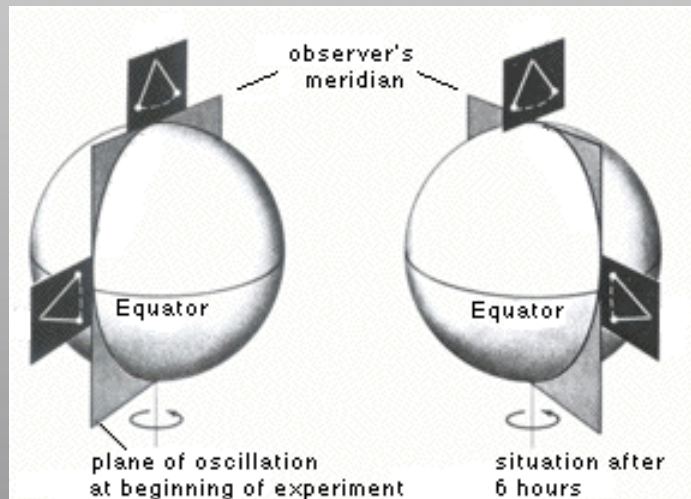
Ruch wzdłuż południka na północ – odchylenie **na zachód** na półkuli południowej i **na wschód** na półkuli północnej

Siła Coriolisa - przykłady



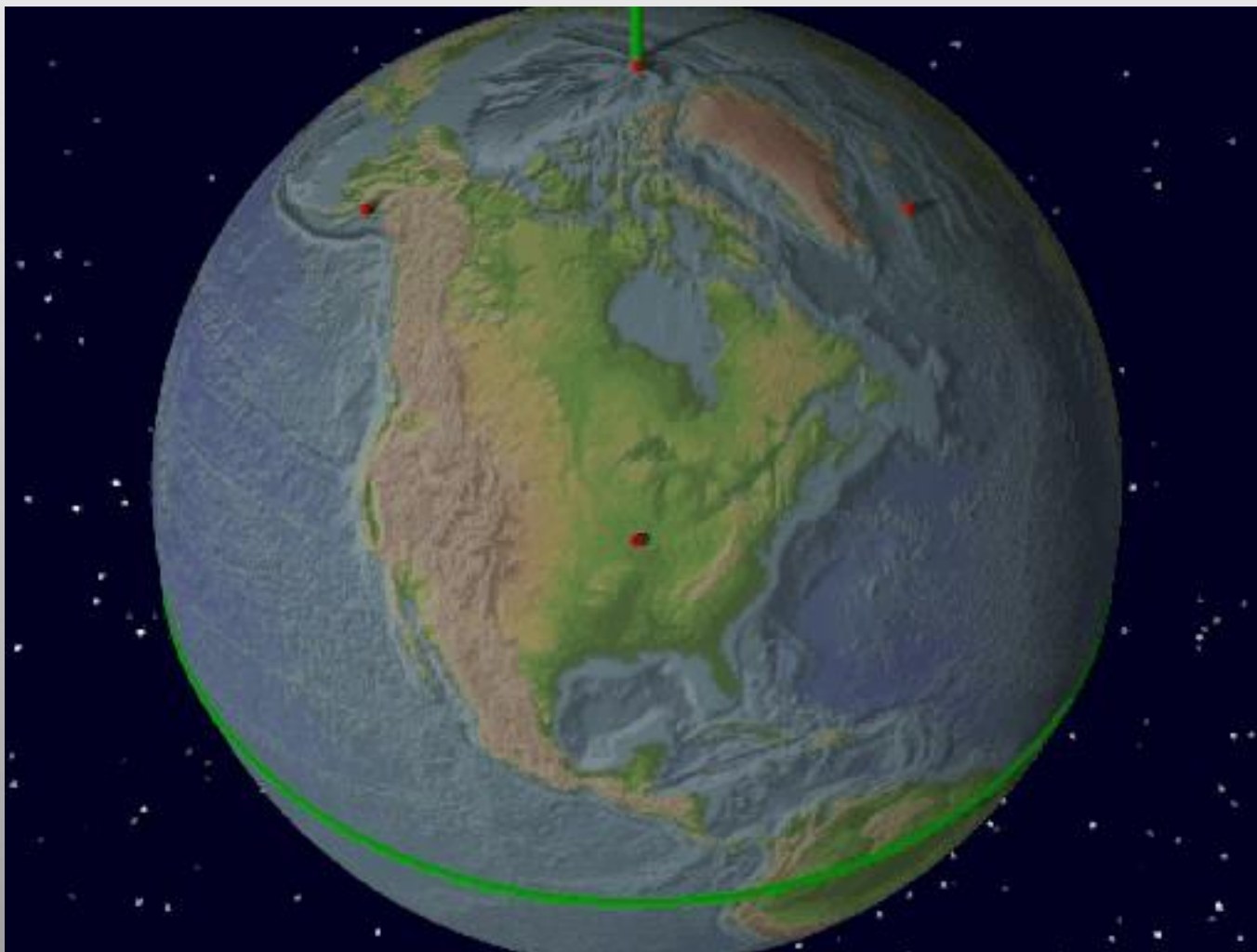
Pasaty – wiatry wiejące od zwrotników do równika na skutek siły Coriolisa skręcają na zachód.

Rzeki płynące w kierunku północnym na półkuli północnej podmywają silniej wschodni brzeg.



Wahadło Foucaulta

Siła Coriolisa - przykłady



Demonstracja Zasada zachowania momentu pędu

